MECÂNICA GERAL - 2/2009

LISTA 5

1. Neste exercício você vai relembrar propriedades de algumas funções hiperbólicas, definidas para qualquer z, real ou complexo, na forma

$$cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \ \ senh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \ \ tgh(z) = \frac{senh(z)}{cosh(z)}$$

(a) Esboce o gráfico destas funções .
(b) Mostre que $cosh(z) = cos(iz)$, e estabeleça relações similares para as outras duas.
(c) Quais são suas derivadas?
(d) Mostre que $cosh^2(z) - senh^2(z) = 1$.
(e) Mostre que $\int \frac{dx}{1-x^2} = arctgh(x)$. (Sugestão: integre pelo método das frações parciais)

2. Considere a citação seguinte, extraída do livro *Diálogos sôbre duas novas ciências*, de Galileu: *Aristóteles diz que "uma bola de ferro de* 100 *libras* (aproximadamente $50kg$) *que caia de uma altura de* 100 *cúbitos* (aproximadamente $67m$) *chegará ao chão antes que uma bola de uma libra tenha caído um único cúbito." Eu digo que elas chegarão ao chão (praticamente) ao mesmo tempo. Você vai ver, se fizer a experiência, que, quando a bola maior chegar ao chão, a menor estará a uma distância dela menor que duas larguras de dedos.*
Nós sabemos que a afirmação atribuída a Aristóteles está totalmente errada, mas será que a de Galileu procede?
(a) Sabendo que a densidade do ferro é $8g/cm^3$, determine a velocidade terminal das duas bolas de ferro.
(b) Encontre o tempo que a bola maior leva para chegar ao chão, e a posição da bola menor neste mesmo instante. Qual a distância entre elas? Galileu tem razão ou não?

3. Considere um objeto que se move sôbre um plano horizontal sem atrito sob a ação de uma única força horizontal (de arrasto) dada por $f = -bv - cv^2$.
(a) Escreva a equação de movimento para este objeto e resolva-a usando o método de separação de variáveis.
(b) Esboce o gráfico de v como função de t. Discuta seu comportamento para grandes valores de t. Que termo da expressão da força é dominante quando t é grande?

4. Uma partícula carregada de massa m e carga q positiva entra, com uma velocidade inicial $\vec{v}_0$ arbitrária, numa região do espaço onde sofre a ação combinada de um campo elétrico e de um campo magnético, $\vec{E}$ e $\vec{B}$, ambos uniformes e ortogonais entre si. A força resultante sôbre a partícula é $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$.
(a) Escreva a equação de movimento da partícula e separe-a nas 3 componentes cartesianas (escolha os eixos adequadamente!).
(b) Esta montagem pode servir como um seletor de velocidades. Mostre que existe uma velocidade inicial $\vec{v}_0$ para a qual a partícula atravessa esta região sem alterar sua trajetória.
(c) Resolva as equações de movimento e encontre as componentes da velocidade da partícula como função do tempo.
(d) Mostre que, se a componente da velocidade inicial da partícula na direção do campo magnético for nula, existe um referencial inercial em movimento em relação ao laboratório a partir do qual o

movimento da partícula é visto como circular uniforme. Use este fato para identificar a forma da trajetória no referencial do laboratório neste caso particular.

5. Dois irmãos gêmeos, cada um com massa m, estão em pé na extremidade de uma plataforma ferroviária móvel (um vagão sem paredes), de massa M, em repouso, e que pode deslizar sem atrito sôbre os trilhos. Cada um dos irmãos pode correr até a outra extremidade da plataforma e dela saltar com uma velocidade u fixa em relação ao vagão.
(a) Use a conservação do momento (linear) para determinar a velocidade com que o vagão recua se os dois irmãos correm e saltam ao mesmo tempo.
(b) Qual será esta velocidade se o segundo irmão só começa a correr depois que o primeiro tiver saltado? Qual dos dois procedimentos dá ao vagão maior velocidade final? (Dica: u é a velocidade em relação ao vagão com que cada irmão salta de sua extremidade; tem o mesmo valor para cada irmão nos itens (a) e (b).)
(c) Qual é a velocidade final do vagão em cada caso se cada irmão começa a corrida que antecede o salto em extremidades diferentes, usando os dois procedimentos descritos acima?

6. Considere um foguete que se move em uma trajetória reta, sujeito à ação de uma força externa agindo na direção desta trajetória.
(a) Escreva a equação de movimento para este foguete. (não se espante, é fácil mesmo!)
(b) Considere agora o caso particular (de grande interêsse!) no qual o foguete decola verticalmente a partir do repouso, sujeito a uma campo gravitacional g constante. Diga porque eu posso chamar g desta forma, fazendo analogia com o campo elétrico. Escreva a equação de movimento neste caso. Suponha que o foguete ejeta massa (combustível) a uma taxa constante $\dot{m} = -k$, onde k é uma constante positiva, e que a velocidade de ejeção dos gases em relação ao foguete é fixa e igual a v_e. Encontre a função $v(t)$.
(c) O foguete que transporta os ônibus espaciais americanos tem as seguintes características: sua massa inicial é 2×10^6 kg, sua massa dois minutos após a decolagem é 1×10^6 kg, a velocidade média de ejeção de combustível é aproximadamente 3×10^3 m/s e a velocidade inicial é, claro, nula. Usando estes dados e sua solução do item anterior determine a velocidade do foguete dois minutos após o lançamento, supondo que sua trajetória seja vertical, o que é aproximadamente verdade, e que g não mude significativamente durante esta parte de seu trajeto. Compare com o resultado obtido na ausência de campo gravitacional.
(d) Descreva qualitativamente o que aconteceria, a partir do instante de lançamento, ao foguete se tivesse sido projetado de modo que a força de impulsão fosse menor que o valor inicial de seu peso.
(e) Use sua solução do item (b) e mostre que a altura do foguete como função do tempo pode ser escrita na forma (m_0 é a massa inicial do foguete)

$$y(t) = v_e t - 1/2 g t^2 - \frac{m v_e}{k} ln(\frac{m_0}{m})$$

Use os dados do item (c) e determine a altura daquele foguete dois minutos após o lançamento.
(f) Considere agora um foguete sujeito à ação de uma força resistiva (de arrasto) linear $\vec{f} = -b\vec{v}$ mas nenhuma outra força externa. Mostre que, se o foguete tem velocidade inicial nula, massa inicial m_0 e ejeta massa com uma velocidade (relativa a ele) constante v_e e a uma taxa constante $k = -\dot{m}$, sua velocidade em função da massa remanescente m é dada por

$$v(m) = \frac{k}{b} v_e [1 - (\frac{m}{m_0})^{b/k}]$$

7. Para ilustrar o uso de foguetes com múltiplos estágios, considere o seguinte:
(a) A massa de combustível que um foguete carrega é $0.6m_0$. Qual é a velocidade final deste foguete depois de acelerar a partir do repouso no espaço livre (na ausência, portanto, de forças externas) se ele queima todo seu combustível em um único estágio? Expresse sua resposta em termos de v_e.
(b) Suponha agora que ele queima o combustível em dois estágios, da seguinte maneira: no primeiro, queima a massa de $0.3m_0$. Em seguida, ejeta o tanque de combustível do primeiro estágio, cuja massa é $0.1m_0$, e só então queima o combustível restante ($0.3m_0$). Determine a velocidade final neste caso, supondo o mesmo valor constante para v_e em todos os casos, e compare os dois resultados.